1 ع ر-ت	مبادئ في المنطق	مذكرة القواعد

كتابة عبارة رياضية باستعمال المكممات $\forall$ و $\exists$ و $\exists!$

أمثلة

- العبارة : « مهما يكن العدد الحقيقي x فإن : $x^2 \geq 0$ »
  تكتب رياضيا : $\forall x \in IR \quad x^2 \geq 0$
- العبارة : « يوجد على الأقل عدد حقيقي a يحقق $2a^2 - 6 = -a$ »
  تكتب رياضيا : $\exists a \in IR \quad 2a^2 - 6 = -a$
- العبارة :« يوجد عدد حقيقي موجب وحيد b يحقق $b^2 = 7$ »
  تكتب رياضيا : $\exists ! b \in IR^+ \quad b^2 = 7$

حقيقة عبارة رياضية

أمثلة

العبارات الواردة في المثال السابق كلها صحيحة لأن :

- في المثال الأول مربع أي عدد حقيقي يكون دائما موجبا
- في المثال الثاني المتساوية $2a^2 - 6 = -a$ تعني $2a^2 + a - 6 = 0$ محددة الحدودية : $2x^2 + x - 6 = 0$ هو : $\Delta = 1^2 + 4 \times 2 \times 6 = 1 + 48 = 49 > 0$ هذا يعني أن هذه المعادلة تقبل حلين حقيقين مختلفين، إذن a يمكن أن يكون أحد هذين الحلين ($\frac{3}{2}$ أو -2).
- في المثال الثالث المتساوية $b^2 = 7$ تعني $b = \sqrt{7}$ أو $b = -\sqrt{7}$ ، هذا يعني أن $\sqrt{7}$ هي: القيمة الحقيقية الموجبة الوحيدة التي تحق المتساوية.
- العبارة : $\forall x \in IR \quad 2x + 1 \geq 0$ خاطئة لأنه مثلا $-8 \in IR$ لكن : $-8 \times 2 + 1 = -16 + 1 = -15 < 0$
- العبارة : $\exists x \in Q \quad x^2 = 3$ خاطئة لأن الأعداد التي مربعها 3 هي $\sqrt{3}$ و $-\sqrt{3}$ وكلاهما ليس بعدد جذري
- العبارة : $\exists ! y \in IR \quad 7 < y < 9$ خاطئة لأن $7 < 8 < 9$ و $8 \in IR$ ، $7 < 8{,}3 < 9$ و $8{,}3 \in IR$
- العبارة : $\exists ! y \in IN \quad 7 < y < 9$ صحيحة لأن العدد الصحيح الطبيعي الوحيد المحصور بين 7 و 9 هو 8.

العمليات على العبارات

أمثلة

- **نفي عبارة** P : هي العبارة التي تكون صحيحة عندما تكون P خاطئة و تكون خاطئة عندما تكون P صحيحة ، و نرمزلها بـ $\overline{P}$ أو $\neg P$
- **عطف عبارتين** P و Q : هي العبارة التي تكون صحيحة فقط إذا كانت العبارتان P و Q صحيحتان معا ، و نرمزلها بـ: $(P \text{ و } Q)$ أو أيضا $P \wedge Q$
- **فصل عبارتين** P و Q : هي العبارة التي تكون صحيحة إذا كانت إحدى العبارتان P أو Q صحيحة و تكون خاطئة إذا كانت العبارتان معا خاطئتان .
- **الاستلزام** $P \Rightarrow Q$: هي العبارة التي تكون صحيحة إذا كانت العبارتان P و Q صحيحتان معا أو كانت العبارة P خاطئة (سواء كانت Q صحيحة أم خاطئة) ، بمعنى أنها ستكون خاطئة فقط إذا كانت العبارة P صحيحة و Q خاطئة .
(لا يمكن أن ننطلق من صواب و نصل إلى خطأ)
- **التكافؤ** $P \Leftrightarrow Q$: هي العبارة التي تكون صحيحة فقط إذا كانت العبارتان P و Q صحيحتان معا أو خاطئتان معا.

طـــرق الاستدلال

إذا تعذر علينا البرهان على صحة عبارة راضية بطريقة مباشرة و ذلك مثلا لصعوبة استعمال المعطيات أو لسبب آخر فإن هناك طرقا رياضية تسمح بالبرهان على صحة أو خطأ هذه العبارة ، من أهمها :

الاستدلال بالخلــف

إذا أردنا أن نبرهن أن عبارة ما صحيحة نفترض أنها خاطئة و نحاول أن نجد تناقضا أو عبارة غير صحيحة.

مثال : a عدد صحيح طبيعي حيث a^3+a^2+a عدد فردي، بين أن a عدد فردي

نفترض أن a عدد زوجي، إذن $a^3=a\times a\times a$ زوجي و $a^2=a\times a$ زوجي

منه a^3+a^2+a زوجي (لأن مجموع عدة أعداد زوجية هو عدد زوجي)

و هذا يناقض المعطيات. إذن الافتراض خاطئ و بالتالي نفيه صحيح أي أن a عدد فردي

الاستدلال بفصل الحالات

إذا أردنا البرهان على صحة العبارة $(P_1 \text{ أو } P_2 \text{ أو } P_3 \text{ أو } ...) \Rightarrow Q$ فإنه يمكننا عوضا عن ذلك أن نبرهن على صحة كل العبارات $P_1 \Rightarrow Q$ و $P_2 \Rightarrow Q$ و $P_3 \Rightarrow Q$ و ...

مثال : بين أن: $\forall x > 0 \quad x + \frac{1}{\sqrt{x}} > 1$

بما أن $x > 0$ فإنه لدينا حالتان : $0 < x \le 1$ أو $x > 1$

الحالة الأولى : إذا كان $x > 1$ فإن : $\frac{1}{\sqrt{x}} > 0$ نجمع المتفاوتتين فنجد : $x + \frac{1}{\sqrt{x}} > 1$

الحالة الثانية : إذا كان $0 < x \le 1$ فإن : $\frac{1}{x} \ge 1$ منه $\frac{1}{\sqrt{x}} \ge 1$ و لدينا $x > 0$

نجمع فنجد : $x + \frac{1}{\sqrt{x}} > 1$ إذن في جميع الحالات : $x + \frac{1}{\sqrt{x}} > 1$

الاستدلال بالاسلزام المضاد للعكس

إذا أردنا البرهان على صحة العبارة $P \Rightarrow Q$

فإنه يمكننا عوضا عن ذلك أن نبرهن على صحة $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$

مثال : بين أن: $x^2 > 4 \Rightarrow (x > 2 \text{ أو } x < -2)$

لنبين عوضا عن ذلك أن : $(x \le 2 \text{ و } x \ge -2) \Rightarrow x^2 \le 4$ أي $(-2 \le x \le 2) \Rightarrow x^2 \le 4$

بالفعل : $(-2 \le x \le 2) \Rightarrow |x| \le 2 \Rightarrow |x|^2 \le 4 \Rightarrow x^2 \le 4$ ، بالتالي $x^2 > 4 \Rightarrow (x > 2 \text{ أو } x < -2)$

الاستدلال بالترجع

إذا أردنا البرهان على صحة العبارة $\forall n \ge n_0 \quad P(n)$ (عبارة تحتوي على متغير صحيح طبيعي)

يمكن أن نبرهن على مايلي :

- ◊ $P(n_0)$ عبارة صحيحة (أي العبارة صحيحة بالنسبة لأول قيمة n_0)
- ◊ نفترض صحة العبارة $P(n)$ ثم نبين صحة العبارة $P(n+1)$

مثال : بين أن: $\forall n \in IN^* \quad 1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$

بالنسبة لـ $n = 1$ لدينا : $\frac{1\times(1+1)}{2} = 1$ إذن المتساوية صحيحة بالنسبة لأول قيمة

نفترض صحة العبارة $1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$ و لنبين أن $1+2+...+n+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

لدينا : $1+2+...+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

و هذا ينهي البرهان